Приложение

Расчет инсоляции Земли для периода 3000BC – 2999AD

Костин А.А., Федоров В.М.

Основные идеи нашего подхода: расстояние от Земли до Солнца и ориентация земной оси берутся из высокоточной модели NASA DE-406 (http://ssd.jpl.nasa.gov), земной эллипсоид разбивается на широтные полоски, а каждый тропический год – на дольки, и каждой паре (полоска, долька) сопоставляется интеграл (Дж) инсоляции (Вт) на полоску от начала до конца дольки. Делением интеграла на площадь полоски получается удельная энергия (Дж/м^2), собранная полоской в пределах дольки. Умножением интеграла на отношение длины фрагмента полоски к длине полоски получается оценка энергии (Дж), собранной этим фрагментом в пределах дольки.

Для расчёта указанных величин применён ряд теоретических упрощений. Основные упрощения: солнечная активность считается постоянной, излучение – исходящим из центра Солнца, влияние земной атмосферы не учитывается. Все теоретические упрощения изложены в разделе 1. Строгие формулы для расчётов собраны в разделе 2. Испробованная технология приближённых вычислений и характерные для неё погрешности описаны в разделе 3.

1. Выбранный подход к описанию приходящей солнечной энергии

Рассматривается промежуток времени с 3000 года до н.э. по 2999 год н.э. Поверхность Земли аппроксимирует покачивающийся относительно геоида эллипсоид, именуемый далее MRS80, с длинами больших полуосей $p_1=p_2=A$=6378137 м и малой полуоси $p_3=B$=6356752 м. Малая полуось в каждый момент совмещается с осью вращения Земли, а центр эллипсоида – с центром масс Земли. Длины полуосей с округлением до метра соответствуют параметрам общеземного эллипсоида GRS80, который неподвижен относительно геоида[1].

---

(1) Параметры GRS80 (Geodetic Reference System 1980) рекомендованы к применению Международным геодезическим и геофизическим союзом (International Union of Geodesy and Geophysics) в 1980 году. Расшифровка MRS80: Moving Reference System 1980.

Покачивающийся эллипсоид MRS80 снабжается воображаемой сеткой параллелей и меридианов, системой нормалей и геодезических координат, в соответствии с которыми определяются вертикальные линии, горизонтальные плоскости и широтные зоны Земли. Эти линии, плоскости и зоны вместе с эллипсоидом слегка покачиваются относительно геоида.

Покачивания связаны с отклонениями оси вращения Земли от её среднего положения в теле Земли. Отклонения регистрируются с конца 19-го века в терминах движения географических полюсов[2].

---

(2) Каждый из географических полюсов движется относительно геоида по многовитковой незамкнутой кривой, умещающейся в квадрате со стороной 30 м. Один виток (цикл Чендлера) длится около 14 месяцев.

Покачивающийся эллипсоид выбран вместо неподвижного по двум причинам: во-первых – чтобы не усложнять расчёты, во-вторых – из-за отсутствия надёжной модели покачивания, охватывающей весь рассматриваемый промежуток времени.

Если нет преград для лучей, то солнечная радиация, достигающая заданной точки земной поверхности, в общем случае раскладывается на вертикальную (по нормали к поверхности) и горизонтальную (касательную к поверхности) составляющие. Вертикальная составляющая далее именуется падающей вертикальной радиацией (ПВР).

Рассматривается модель солнечной радиации и её воображаемого измерения на поверхности Земли, согласно которой

1) изотропное излучение поступает к Земле из центра Солнца[3],

---

(3) Из чего следует, что плотность мощности солнечной радиации убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Солнца.

---

2) затмения игнорируются,
3) плотность мощности радиации на удалении 1 а.е. от центра Солнца в каждый момент равна u_0=1361 Вт/м^2, где 1 а.е. =r_0=149597870691 м,
4) рассеивающее влияние атмосферы не учитывается,
5) земную поверхность замещает покачивающийся эллипсоид MRS80.

Покачивающийся эллипсоид разбивается на Δ-градусные широтные полоски (подразумевается геодезическая широта)[4], где $\Delta \in \{1, 5\}$.

---

(4) Проекция каждой полоски на геоид «плавает» относительно геоида (тип движения – разнообразные шевеления кольца), уходя от своего среднего положения максимум на 15 метров согласно циклам Чендлера.

Вычисляются интегралы ПВР – энергия (в джоулях), поступающая к Земле через каждую из полосок в каждой из L долек каждого исследуемого тропического года, где $L \in \{12,\ 360\}$, а также линейные комбинации этих интегралов (тропические декады, месяцы, кварталы, полугодия, года).

Тропические года выбраны вместо календарных для избавления от четырёхлетней календарной ритмики. Номер тропического года совпадает с номером того календарного года, в котором он начинается. Под тропическим годом понимается проективный тропический год, отслеживаемый по движению проекции Солнца на эклиптику. Если L – число долек, на которые разбивается проективный тропический год, то n-ая долька стартует в момент, когда эклиптическая долгота Солнца принимает значение $360(n–1)/L$ (в градусах).

Для учёта удлинения суток из-за постепенного замедления вращения Земли различается шкала календарного времени, на которой каждым суткам соответствует массив из 86400 календарных секунд (исключая сутки, корректируемые на 1 секунду), и шкала равномерно текущего времени, по которой суточные промежутки измеряются в истинных секундах, и между собою не равны. Интегралы солнечной радиации вычисляются по шкале равномерно текущего времени.

Воображаемые часы, ведущие счёт равномерно текущего времени, располагаются в центре Земли. Событие на малом участке поверхности Земли («пришла порция солнечной радиации») привязывается к оси равномерно текущего времени следующим образом. Берётся момент воображаемого старта соответствующего пучка порции из центра Солнца. В этом пучке выделяется порция, направленная к центру Земли. Вычисляется момент воображаемого прибытия этой порции в центр Земли (если бы преград на её пути не было). Этот момент прибытия и выбирается в качестве момента, к которому привязывается упомянутое событие.

При таком способе привязки возникают малые (от 20 до 40 мс) запаздывания (разные в разных местах полоски). Однако, с точки зрения влияния на масштабные земные процессы такие систематические запаздывания привязки несущественны. Они эквивалентны малым (порядка 30 мс) шевелениям границ долек тропических лет. Вариант с запаздываниями выбран потому, что их исключение привело бы к излишним усложнениям вычислений.

2. Строгие расчётные формулы

В соответствии с выбранной моделью солнечной радиации и её измерения расчёт интегралов ПВР (в джоулях) опирается на расчёт вертикальной инсоляции $\Lambda(\varphi, t, \alpha)$ (Вт/м^2), которая наблюдалась бы при отсутствии земной атмосферы в заданный момент в заданном точке MRS80. Здесь t – момент на шкале равномерно текущего времени (с), φ и α –

выраженные в радианах геодезическая широта (относительно MRS80) и скользящая долгота (переведённый в радианы часовой угол) точки воображаемого измерения ПВР.

Элементарный фрагмент тропического года получается его дроблением на 360 частей. Энергию ПВР, поступающую к Земле через полоску ограждающей поверхности, ограниченную широтами φ_1 и φ_2 (в радианах), в n-м элементарном фрагменте m-го тропического года, обозначим $I_{\text{nm}}(\varphi_1,\varphi_2)$. Энергию ПВР, поступающую через ту же полоску в q-й дольке m-го тропического года, обозначим $J_{\text{qm}}(\varphi_1,\varphi_2)$. Имеем

$$L = 360 \Rightarrow J_{qm}(\varphi_1,\varphi_2) = I_{qm}(\varphi_1,\varphi_2)\,,\quad L = 12 \Rightarrow J_{qm}(\varphi_1,\varphi_2) = \sum_{n=30(q-1)+1}^{30q} I_{nm}(\varphi_1,\varphi_2) \tag{1}$$

Пусть t_{nm1} и t_{nm2} – начало и конец n-го элементарного фрагмента m-го тропического года на шкале равномерно текущего времени (с). Тогда

$$I_{nm}(\varphi_1,\varphi_2) = \int_{t_{nm1}}^{t_{nm2}} \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sigma(\varphi) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \Lambda(t,\varphi,\alpha)\, d\alpha \right) d\varphi \right) dt \tag{2}$$

где $\sigma(\varphi)$ – площадной множитель в месте воображаемого измерения солнечной радиации. С его помощью вычисляется $\sigma(\varphi)d\alpha d\varphi$ – площадь (м^2) бесконечно малой трапеции на эллипсоиде MRS80. Длина средней линии трапеции (вдоль местной параллели): $q_1(\varphi)d\alpha$, высота трапеции (вдоль местного меридиана): $q_2(\varphi)d\varphi$. Имеем

$$\sigma(\varphi) = q_1(\varphi)q_2(\varphi)\,,\ q_1(\varphi) = \frac{A^2}{B} h(\varphi)\cos\varphi\,,\ q_2(\varphi) = \frac{A^2}{B} h^3(\varphi) \tag{3}$$

$$h(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos^2\varphi}}\,,\ \varepsilon^2 = \left(\frac{A}{B}\right)^2 - 1 \tag{4}$$

Пусть $b(t)$ – момент старта из центра Солнца воображаемого светового импульса, достигающего центра Земли в момент t. Пусть в момент $b(t)$ $r(t)$ – расстояние (м) между центрами Солнца и Земли, $\gamma(t)$ – склонение центра Солнца в радианах,$\lambda(\ t)$ – эклиптическая долгота центра Солнца в градусах. Тогда

$$\lambda(t_{nm1}) = n-1,\ \lambda(t_{nm2}) = n \tag{5}$$

$$\Lambda(t,\varphi,\alpha) = u_0 \left(\frac{r_0}{r(t)} \right)^2 \max\left(\frac{D_0(t,\varphi) + D_1(t,\varphi)\cos\alpha}{\left(C_0(t,\varphi) - C_1(t,\varphi)\cos\alpha\right)^{3/2}}\,,\ 0 \right) \tag{6}$$

$$D_0(t,\varphi) = \sin(\varphi)\sin\gamma(t) - \frac{B}{r(t)h(\varphi)}\,,\ D_1(t,\varphi) = \cos(\varphi)\cos\gamma(t) \tag{7}$$

$$C_0(t,\varphi)=1-\frac{2Bh(\varphi)\sin(\varphi)\sin\gamma(t)}{r(t)}+\frac{B^2+\varepsilon^2A^2h^2(\varphi)\cos^2\varphi}{r^2(t)} \tag{8}$$

$$C_1(t,\varphi)=\frac{2A^2h(\varphi)\cos(\varphi)\cos\gamma(t)}{Br(t)} \tag{9}$$

$$A=6378137,\ B=6356752,\ r_0=149597870691,\ u_0=1367 \tag{10}$$

Перед интегрированием по формуле (2) полезно задаться вопросом: если t, φ заданы, то при каких α существует ПВР? Множество значений α, из интервала $(-\pi,\pi)$, при которых наблюдается ПВР, определяется неравенством $|\alpha|<\alpha_M(t,\varphi)$, где $\alpha_M(t,\varphi)$ – рубеж наблюдаемости ПВР на заданной широте φ. Если заданная широта φ близка к 0, то α_M при изменении t колеблется в малой окрестности $\pi/2$. При возрастании модуля заданной широты размах колебаний α_M увеличивается. Если $|\varphi|$ близок к $\pi/2$, то промежуток колебаний α_M простирается от 0 до π, причём α_M принимает крайние значения и, задерживается на них. В периоды, когда $\alpha_M = 0$, на заданной широте наблюдается полярная ночь. В периоды, когда $\alpha_M = \pi$, на заданной широте наблюдается полярный день.

Если $\alpha_M=0$, то ПВР при заданных значениях t,φ не наблюдается. В этом случае вертикальная инсоляция при $\alpha=0$ равна 0. Если $\alpha_M>0$, то с ростом $|\alpha|$ вертикальная инсоляция убывает от положительного максимума при $\alpha=0$ до некоторого минимума при $|\alpha| = \alpha_M$. Если $\alpha_M<\pi$, то минимум равен 0. Если $\alpha_M = \pi$, то минимум либо равен 0, либо больше 0 (между началом и концом полярного дня). Во втором случае ПВР существует не только при $|\alpha|<\alpha_M$, но также и при $|\alpha|=\alpha_M$.

Одно из свойств вертикальной инсоляции – чётность по α: $\Lambda(t,\varphi,\alpha) = \Lambda(t,\varphi,-\alpha)$. Учитывая это свойство, формулу (2) можно преобразовать к более удобному для расчётов виду

$$I_{nm}(\varphi_1,\varphi_2)=\int_{t_{nm1}}^{t_{nm2}}u_0\left(\frac{r_0}{r(t)}\right)^2\left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{2\sigma(\varphi)}{C^{3/2}_0(t,\varphi)}\left(\int_0^{\alpha_M(t,\varphi)}\frac{D_0(t,\varphi)+D_1(t,\varphi)\cos\alpha}{(1-E(t,\varphi)\cos\alpha)^{3/2}}\,d\alpha\right)d\varphi\right)dt \tag{11}$$

$$\alpha_M(t,\varphi)=\arccos\left(\max\left(-1,\min\left(-\frac{D_0(t,\varphi)}{D_1(t,\varphi)},1\right)\right)\right) \tag{12}$$

$$E(t,\varphi)=C_1(t,\varphi)/C_0(t,\varphi)\,,\quad 0<E(t,\varphi)<10^{-4} \tag{13}$$

3. Приближённые вычисления и их погрешности в случае Δ=5, L=12

3.1. План вычислений

Расчёты по формулам (1), (3) – (13) не могут производиться с абсолютной точностью. Неточности присущи исходным данным, процедурам интерполирования и отыскания корней уравнений при обработке исходных данных, а также процедурам интегрирования.

Для варианта Δ=5, L=12 нами была испробована следующая система приближённых вычислений, соответствующая формулам (1), (3) – (13).

Первый этап – рабочая разметка используемых шкал времени, обращение к интернет–сервису HORIZONS NASA (http://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons_doc#specific_quantities; Giorgini et al., 1996) и получение первичных исходных данных, привязанных к началам суток по Гринвичу. Первичные данные – расстояние Земля – Солнце (км), склонение и эклиптическая долгота Солнца (градусы), а также разность хода (с) равномерно текущего и прерывистого (корректируемого) всемирного времени.

Второй этап – вычисление смещений начал и концов элементарных фрагментов тропических лет относительно начал суток по Гринвичу (для этого – отыскание корней уравнений с участием эклиптической долготы) и на этой основе заготовка вторичных исходных данных, привязанных к началам, концам и промежуточным моментам элементарных фрагментов тропических лет (для этого – интерполяция первичных данных). Вторичные исходные данные – расстояние Земля – Солнце (м), склонение Солнца (радианы), а также длительности фрагментов (с) на шкале равномерно текущего времени.

Третий этап – расчёт интегралов ПВР по вторичным исходным данным (для этого – вычисление вспомогательных переменных и их подстановка в процедуры интегрирования).

3.2. Три шкалы времени и их рабочая разметка

Используются три шкалы : CT (Coordinate Time – координатное, оно же равномерно текущее время), UT1 (Universal Time Without Correction – непрерывное всемирное время) и UT2=UTC (Universal Time With Correction – прерывистое всемирное время). Шкала UT2 получается из шкалы UT1 эпизодическими (раз в несколько лет) подвижками на ±1 календарную секунду для выравнивания хода UT2-часов с CT-часами (с 1962 года).

Единица шкалы CT – истинная секунда. На шкале CT вводятся две разметки: тропическая и календарная. Тропическую разметку составляют основные моменты $\{t_{nm1}, t_{nm2}\}$ – начала и концы элементарных фрагментов тропических лет – и промежуточные моменты $\{t_{nm4/3}, t_{nm5/2}\}$:

$$q \in \{4/3, 5/3\} \Rightarrow t_{nmq} = t_{nm1} + (q-1)\,(t_{nm2} - t_{nm1}) \qquad (14)$$

Тропическая разметка простирается от первого фрагмента тропического года 3000BC до последнего фрагмента тропического года 2999AD. Истинная длительность d_{nm} (в истинных секундах) n-го фрагмента m-го тропического года равна

$$d_{nm} = t_{nm2} - t_{nm1} \qquad (15)$$

Календарную разметку $\{t_k\}$ составляют начала суток по Гринвичу: нулевым суткам соответствует дата 3000BC-02-23, далее сквозная нумерация до даты 3000AD-05-05. Моментам $\{t_k\}$, выделенным на шкале CT, соответствуют моменты $\{T_k\}$ на шкале UT2 (по этой шкале отсчитываются календарные секунды):

$$T_k - T_{k-1} - 86400 \in \{-1, 0, 1\} \qquad (16)$$

Далее используются функции $\tau_1(\cdot)$ и $\tau_2(\cdot)$:

$$\tau_1(t_k) = t_k - t_{k-1} \qquad (17)$$

$$\tau_2(t_k) = T_k - T_{k-1} \qquad (18)$$

Их смысл: $\tau_1(t_k)$ и $\tau_2(t_k)$ – длительность суток с номером k в истинных и в календарных секундах.

Последовательность $\{t_k - T_k\}$ – часть первичных исходных данных. Для получения $\{\tau_1(t_k)\}$ используется формула:

$$\tau_1(t_k) = (t_k - T_k) - (t_{k-1} - T_{k-1}) + \tau_2(t_k) \qquad (19)$$

3.3. Извлечение первичных исходных данных

Первичные исходные данные – массив величин вида $r(t_k)/1000$, $(180/\pi)\gamma(t_k)$, $(180/\pi)\lambda(t_k)$, $t_k - T_k$. Здесь $r/1000$ – расстояние между центрами Солнца и Земли в километрах, $180\gamma/\pi$ и $180\lambda/\pi$ – склонение и эклиптическая долгота центра Солнца в градусах, $t_k - T_k$ – разность хода CT-часов и UT2-часов в секундах. Как уже отмечалось в разделе 2, величины $r(t)$, $\gamma(t)$, $\lambda(t)$, регистрируемые в момент t, относятся к более раннему моменту $b(t)$ (важна поправка на пробег светового импульса от центра Солнца к центру Земли).

Первичные исходные данные были извлечены нами из эфемерид NASA DE406 с помощью интернет–сервиса HORIZONS. В производимых запросах задавались следующие параметры (для *Time Span* приведён образец):

Ephemeris Type = OBSERVER,

Target Body = Sun [Sol] [10],

Observer Location = Geocentric [500],

Time Span = Start=2001-01-01, Stop=2200-12-31, Step=1 d

*Table Settings = QUANTITIES=2,20,30,31; extra precision=YES***.**

3.4. Вычисление вторичных исходных данных по первичным

Вторичные исходные данные – массив величин вида $r(t_{\text{nmq}})$, $\gamma(t_{\text{nmq}})$, d_{nm}, где $q \in \{1, 4/3, 5/3, 2\}$. Вторичные данные вычисляются по первичным с помощью гладкой сплайн-интерполяции (непрерывен как сам сплайн, так и его первая и вторая производные). Формулы сплайн-интерполяции:

$$f_{\text{M}} = f(x_{\text{M}}),\ f_0 = f(x_0),\ f_1 = f(x_1),\ f_2 = f(x_2),\ x_0 \le x \le x_1,\ u = (x - x_0)/(x_1 - x_0) \tag{20}$$

$$(0 < x_0 - x_{\text{M}} = x_1 - x_0 = x_2 - x_1,\ x_0 \le x \le x_1) \Rightarrow f(x) \approx \text{spl}(f_{\text{M}}, f_0, f_1, f_2, u) \tag{21}$$

$$spl(f_M, f_0, f_1, f_2, u) = d_0 + d_1 u + d_2 u^2 + d_3\, pol(u) \tag{22}$$

$$d_0 = f_0,\ d_1 = \frac{f_1 - f_M}{2},\ d_2 = \frac{f_1 - 2f_0 + f_M}{2},\ d_3 = \frac{f_2 - 3f_1 + 3f_0 - f_M}{2} \tag{23}$$

$$pol(u) = \frac{-31u^3 + 35u^4 + 21u^5 - 35u^6 + 10u^7}{12} \tag{24}$$

Формулы применения сплайн-интерполяции:

$$\lambda_M(n,t) = \begin{cases} \lambda(t) - 2\pi, & (\pi \le \lambda(t))\ \&\ (n \le 3) \\ \lambda(t), & (\lambda(t) < \pi) \vee (3 < n) \end{cases} \tag{25}$$

$$\lambda_P(n,t) = \begin{cases} \lambda(t) + 2\pi, & (\lambda(t) \le \pi)\ \&\ (358 \le n) \\ \lambda(t), & (\pi < \lambda(t)) \vee (n < 358) \end{cases} \tag{26}$$

$$j = j(n,m,q),\ \lambda_{\text{M}}(n, t_{\text{j}}) \le \pi(n + q - 2)/180 \le \lambda_{\text{P}}(n, t_{\text{j+1}}) \tag{27}$$

$$r(t_{nmq}) = spl(r(t_{j-1}), r(t_j), r(t_{j+1}), r(t_{j+2}), u_{nmq}) \tag{28}$$

$$\gamma(t_{nmq}) = spl(\gamma(t_{j-1}), \gamma(t_j), \gamma(t_{j+1}), \gamma(t_{j+2}), u_{nmq}) \tag{29}$$

$$\tau_1(t_{nm2}) = spl(\tau_1(t_{j-1}), \tau_1(t_j), \tau_1(t_{j+1}), \tau_1(t_{j+2}), u_{nm2}) \tag{30}$$

$$d_{nm} = ((j(n,m,2) + u_{nm2}) - (j(n,m,1) + u_{nm1}))\tau_1(t_{nm2}) \tag{31}$$

где u_{nmq} – корень уравнения

$$\lambda(t_{nmq}) = \frac{\pi(n+q-2)}{180} = spl(\lambda_M(n, t_{j-1}), \lambda_M(n, t_j), \lambda_P(n, t_{j+1}), \lambda_P(n, t_{j+2}), u_{nmq}) \tag{32}$$

Корень каждого уравнения вида (32) ищется методом последовательных приближений с погрешностью 10^{-9} (в сутках).

3.5. Расчёт интегралов ПВР по вторичным исходным данным

После перехода от (2) к (11) дальнейшее упрощение заключается в приближённом аналитическом вычислении интеграла по α. Применяя разложение

$$\frac{1}{(1-x)^{3/2}} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + \frac{35}{16}x^3 + \frac{315}{128}x^4 + Q_5(x) \tag{33}$$

$$0 < x < 10^{-4} \Rightarrow 0 < Q_5(x) < 2.71x^5 \tag{34}$$

и опуская для краткости аргументы t, φ введённых выше функций α_{M}, D_0, D_1, E, и вспомогательных функций μ, F_0, h_0, …, h_5, находим

$$\int_0^{\alpha_M} \frac{D_0 + D_1 \cos\alpha}{(1 - E\cos\alpha)^{3/2}} d\alpha = (1+\mu)F_0\,,\ 0 < \mu < 3\cdot 10^{-20}\,,\quad F_0 = h_0\alpha_M + \sum_{j=1}^{5} \frac{h_j}{j}\sin(j\alpha_M) \quad (35)$$

$$h_0 = \frac{3E}{4}\left(1 + \frac{35}{32}E^2\right)D_1 + \left(1 + \frac{15}{16}E^2 + \frac{945}{1024}E^4\right)D_0 \quad (36)$$

$$h_1 = \left(1 + \frac{45}{32}E^2 + \frac{1575}{1024}E^4\right)D_1 + \frac{3E}{2}\left(1 + \frac{35}{32}E^2\right)D_0 \quad (37)$$

$$h_2 = \frac{E}{4}\left(3 + \frac{35}{8}E^2\right)D_1 + \frac{15E^2}{16}\left(1 + \frac{21}{16}E^2\right)D_0\,,\quad h_3 = \frac{15E^2}{32}\left(1 + \frac{105}{64}E^2\right)D_1 + \frac{35}{64}E^3 D_0 \quad (38)$$

$$h_4 = \frac{35E^3}{128}\left(D_1 + \frac{9}{8}ED_0\right),\ h_5 = \frac{315E^4}{2048}D_1 \quad (39)$$

При интегрировании $(1+\mu(t,\varphi))F_0(t,\varphi)$ по φ и по t слагаемое $\mu(t,\varphi)$ ввиду его малости отбрасывается:

$$I_{nm}(\varphi_1,\varphi_2) \approx \int_{t_{nm1}}^{t_{nm2}} F_2(t)dt\,,\ F_2(t) = u_0\left(\frac{r_0}{r(t)}\right)^2 \left(\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_1(t,\varphi)d\varphi\right) \quad (40)$$

$$F_1(t,\varphi) = \frac{\sigma(\varphi)}{C_0^{3/2}(t,\varphi)} F_0(t,\varphi) \quad (41)$$

Перед интегрированием по φ уточняются его пределы (чтобы не проходить впустую значения φ, при которых $\alpha_{\text{М}}=0$). Пара (φ_1,φ_2) заменяется парой $(\varphi_{1\text{М}},\varphi_{2\text{М}})$ и в случае $\varphi_{1\text{М}}<\varphi_{2\text{М}}$ вычисляется шаг интегрирования $(\varphi_{2\text{М}}-\varphi_{1\text{М}})/set$, приближённо соответствующий 1 градусу. Опуская для краткости аргумент t введённых выше функций r, γ и вспомогательных функций F_1, $\varphi_{1\text{М}}$, $\varphi_{2\text{М}}$, $\gamma_{\text{Н}}$, $\gamma_{\text{В}}$, η, $\eta_{\text{Н}}$, $\eta_{\text{Н1}}$, $\eta_{\text{Н2}}$, $\eta_{\text{В}}$, $\eta_{\text{В1}}$, $\eta_{\text{В2}}$, находим

$$\gamma_B = \arcsin\frac{B}{r},\ \gamma_H = -\gamma_B,\ \eta(x) = \arcsin\frac{B\sqrt{1+\varepsilon^2\sin^2(\gamma + x)}}{r} \quad (42)$$

$$\gamma \le \gamma_H \Rightarrow \varphi_{1M} = \varphi_1\,,\ \gamma > \gamma_H \Rightarrow \varphi_{1M} = \max\left(\varphi_1, -\frac{\pi}{2} + \gamma + \eta_H\right),\ \eta_H = \eta(\eta_H) \quad (43)$$

$$\gamma \ge \gamma_B \Rightarrow \varphi_{2M} = \varphi_2\,,\ \gamma < \gamma_B \Rightarrow \varphi_{2M} = \min\left(\varphi_2, \frac{\pi}{2} + \gamma - \eta_B\right),\ \eta_B = \eta(-\eta_B) \quad (44)$$

$$\eta_H \approx \eta_{H2} = \eta(\eta_{H1})\,,\ \eta_{H1} = \eta(0)\,,\ |\,\eta_H - \eta_{H2}\,| < 3.7\times 10^{-18} \quad (45)$$

$$\eta_B \approx \eta_{B2} = \eta(-\eta_{B1})\,,\ \eta_{B1} = \eta(0)\,,\ |\,\eta_B - \eta_{B2}\,| < 3.7\times 10^{-18} \quad (46)$$

$$\varphi_{1M} < \varphi_{2M} \Rightarrow set = \left[\frac{\varphi_{2M} - \varphi_{1M}}{\pi/180}\right] + 1,\quad \varphi_{MK} = \varphi_{1M} + \frac{\varphi_{2M} - \varphi_{1M}}{set}K \quad (47)$$

$$\varphi_{1M} \geq \varphi_{2M} \Rightarrow \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_1(\varphi)d\varphi = 0\,,\ \varphi_{1M} < \varphi_{2M} \Rightarrow \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_1(\varphi)d\varphi = \sum_{K=0}^{set-1}\left(\int_{\varphi_{MK}}^{\varphi_{M(K+1)}} F_1(\varphi)d\varphi\right) \quad (48)$$

Каждое слагаемое в интегральной сумме по φ вычисляется путём замены подынтегральной функции полиномом 3-й степени[5] (метод полинома 3-й степени):

$$\int_{\varphi_{MK}}^{\varphi_{M(K+1)}} F_1(\varphi)d\varphi \approx \left(\frac{\varphi_{2M} - \varphi_{1M}}{set}\right)\frac{1}{8}\left(F_1(\varphi_{MK}) + 3F_1\left(\frac{\varphi_{MK}}{3/2} + \frac{\varphi_{M(K+1)}}{3}\right) + 3F_1\left(\frac{\varphi_{MK}}{3} + \frac{\varphi_{M(K+1)}}{3/2}\right) + F_1(\varphi_{M(K+1)})\right) \quad (49)$$

---

(5) При использовании полинома первой степени получился бы широко известный метод трапеций. От него пришлось отказаться, поскольку характерное для него «срезание» кривизны подынтегральной функции приводило бы к систематической ошибке. Третья степень полинома минимальна среди степеней, дающих приемлемую погрешность.

Интеграл $\int_{t_{nm1}}^{t_{nm2}} F_2(t)dt$ берётся по промежутку, в котором эклиптическая долгота центра Солнца прирастает на 1 градус. Этот прирост близок к изменению широты на шаге интегрирования по широте. Поэтому естественно вычислять интеграл $\int_{t_{nm1}}^{t_{nm2}} F_2(t)dt$ так же, как интеграл $\int_{\varphi_{MK}}^{\varphi_{M(K+1)}} F_1(\varphi)d\varphi$, методом полинома 3-й степени:

$$\int_{t_{nm1}}^{t_{nm2}} F_2(t)dt \approx \frac{d_{nm}}{8}\left(F_2(t_{nm1}) + 3F_2\left(t_{nm4/3}\right) + 3F_2\left(t_{nm5/3}\right) + F_2(t_{nm2})\right) \quad (50)$$

В итоге практический расчёт интегралов ПВР производится на основе вторичных исходных данных по формулам (1), (40), (50), (41), (48), (49) с использованием (42) – (47), (35) – (39), (12) – (13), (7) – (10), (3)–(4).

3.6. Итоговые погрешности вычислений

Итоговая погрешность вычисления каждого интеграла ПВР – максимум несколько процентов от среднего модуля его межгодовой изменчивости. Относительная погрешность не превосходит 0.005% для интегралов ПВР вблизи полюсов и 0.00005% для интегралов ПВР вблизи экватора.